Orden de Magnitud: estimación rápida y modelamiento geométrico

Introducción a la estimación

En ocasiones sólo nos interesa un valor aproximado para una cantidad. Esto podría podría ocurrir si un cálculo exacto tomaría mucho más tiempo del que disponemos, o se requieren datos adicionales que no están disponibles. En otros casos, tal vez queramos hacer una estimación burda sólo para verificar un cálculo exacto hecho con calculadora, y asegurarnos de no haber cometido equivocaciones al introducir los números.

Una estimación burda se hace redondeando todos los números a una cifra significativa y su potencia de 10; después del cálculo, se mantiene de nuevo sólo una cifra significativa. Tal estimación se llama **estimación del orden de magnitud** y puede ser exacta dentro de un factor de 10, y a veces mucho mejor. De hecho, la frase "orden de magnitud" se utiliza a veces simplemente para indicar la potencia de 10 de la que estamos hablando.

EJEMPLO 1. Volumen de un lago.

Estimar cuánta agua contiene el lago de Guatavita (figura 1), que tiene una forma aproximadamente circular con 700 metros de diámetro y se considera que tiene una profundidad promedio de más o menos 125 metros.

Figura 1: ¿Cuánta agua hay en este lago? (La imagen es de la laguna de Guatavita). Fuente: Colparques

PLANTEAMIENTO Ningún lago es un círculo perfecto ni puede esperarse que tenga un fondo totalmente plano. Pero aquí sólo estamos realizando estimaciones. Para estimar el volumen, usamos un modelo sencillo del lago como si fuera un cilindro: multiplicamos la profundidad promedio del lago por su área superficial aproximadamente circular, como si el lago fuera un cilindro (figura 2).

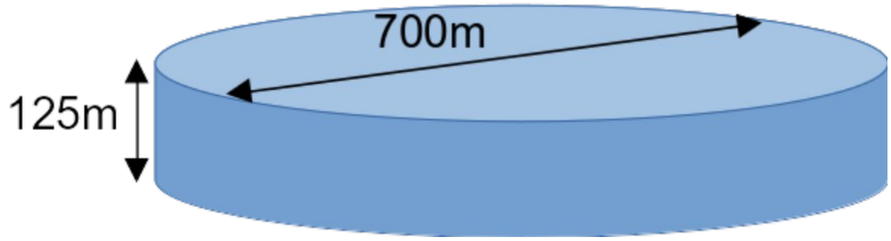


Figura 2: Medidas del cilindro para estimar el volumen del lago Guatavita.

SOLUCIÓN El volumen V de un cilindro es el producto de su altura h por el área de su base: $V = h\pi r^2$, donde r es el radio de la base circular. Viendo la figura 2 y conectando con los datos conocidos, tenemos que el radio es la mitad de $700\,m$, es decir $r = 350\,m$.

Con la información completa de todas las variables de la fórmula del cilindro podemos entonces sustituir los valores y obtener el valor estimado:

$$V = h\pi r^2 \approx (125\,m) \times (3.1416) \times (350\,m)^2 \approx 48.105.750\,m^3 \approx 4.81 \times 10^7$$

Donde π se redondeó a 3.1416. Por lo tanto el valor de 4.81×10^7, al ser un valor inexacto por asumir el lago como un cilindro perfecto, nos da una idea más sensata de la cantidad en el orden de magnitud que en su cantidad misma. Por ello, es correcto decir que el volumen de agua del lago Guatavita es del orden de diez millones de metros cúbicos.

EJEMPLO 2. Espesor de una página..

PLANTEAMIENTO Al principio tal vez usted piense que se requiere un dispositivo de medición especial, como un micrómetro (figura 3), para medir el espesor de una página, ya que una regla de medición ordinaria no serviría. Sin embargo, disponemos de un truco, o para expresarlo en términos físicos, podemos usar la simetría: podemos suponer de manera razonable de que todas las páginas de este libro tienen el mismo espesor.

Figura 3: Micrómetro usado para medir espesores pequeños.

SOLUCIÓN Entonces, usamos una regla para medir cientos de páginas a la vez. Si tomamos las páginas de un libro, el espesor de las primeras 500 páginas de este libro (página 1 a la 500), obtendrá algo así como 1.5 cm. tenga en cuenta que 500 páginas, contando el frente y la vuelta son 250 piezas de papel separadas. Por lo tanto, el espesor de una página es aproximadamente:

$$\frac{1.5\,cm}{250\ páginas} \approx 6 \times 10^{-3}\,cm = 6 \times 10^{-2}\,mm$$

que equivale a menos de un décimo de milímetro (0.1 mm).

EJEMPLO 3. Altura por triangulación.

Estime la altura del edificio que se muestra en la figura 4 usando "triangulación", es decir, con la ayuda de un poste de parada de autobús y de un amigo.

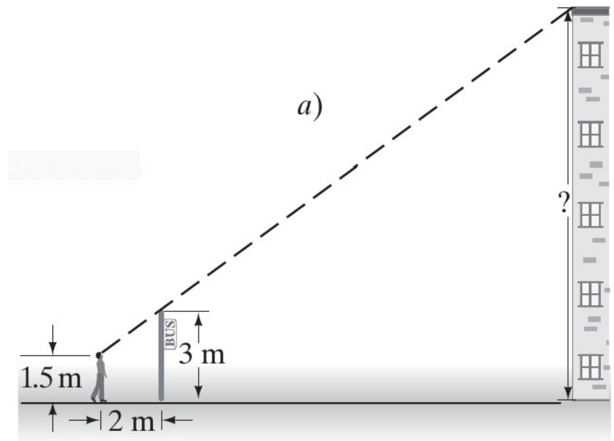


Figura 4: ¡Los diagramas son realmente útiles!

PLANTEAMIENTO Al situar a su amigo a un lado del poste, usted estima que la altura del poste es de 3 m. Luego, usted se aleja del poste hasta que la parte superior de éste quede en línea con la azotea del edificio (figura 4). si usted mide 1.67m. de altura, por lo que sus ojos están aproximadamente a 1.5 m del suelo. Su amigo es más alto y cuando él estira sus brazos, una mano lo toca a usted y la otra toca el poste, así que usted estima que la distancia horizontal entre usted y el poste es como de 2 m (figura 4). Después usted camina la distancia del poste a la base del edificio con pasos aproximados de 1 m de largo, y obtiene un total de 16 pasos, o ~16 m.

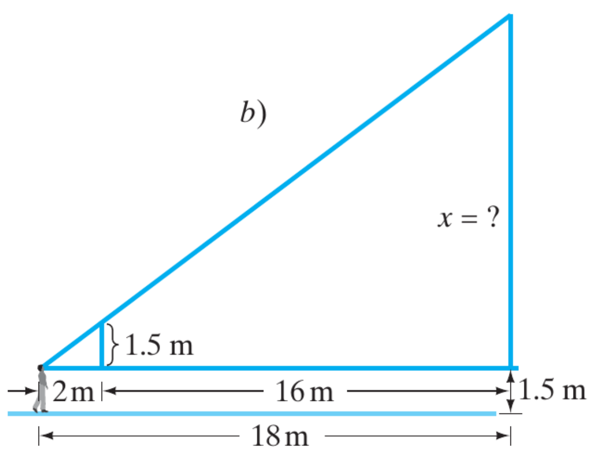


Figura 5: Representación esquemática del problema en forma de una configuración de triángulos semejantes.

SOLUCIÓN Ahora dibuja a escala el diagrama que se muestra en la figura 5 usando estas medidas. Mide en el diagrama que el último lado del triángulo, que es aproximadamente $x = 13\,m$. Alternativamente, puede usar triángulos semejantes para obtener la altura x:

$$\frac{1.5\,m}{2\,m} = \frac{x}{18\,m}\ \textit{Entonces}\ x \approx 13.5\,m$$

Finalmente, usted suma la altura de sus ojos de 1.5 m sobre el suelo para obtener el resultado final: el edificio mide aproximadamente 15 metros de altura.

EJEMPLO 4. Estimación del radio de la Tierra.

Aunque usted no lo crea, puede estimar el radio de la Tierra sin tener que ir al espacio. Si usted ha estado a la orilla de un lago grande, quizás haya notado que no puede ver a través del lago, la playa, los muelles o las rocas al nivel del agua que hay en la orilla opuesta. El lago parece interponerse entre usted y la orilla opuesta: lo cual es una buena pista de que la Tierra es redonda. Suponga que usted sube por una escalera plegable y descubre que cuando sus ojos están a 3m por encima del agua, alcanza a ver las rocas al nivel del agua de la orilla opuesta. A partir de un mapa, usted estima que la distancia a la orilla opuesta es como $d \approx 6.1\,km$. Utilice la figura 1 con $h = 3.0\,m$ para estimar el radio R de la Tierra.

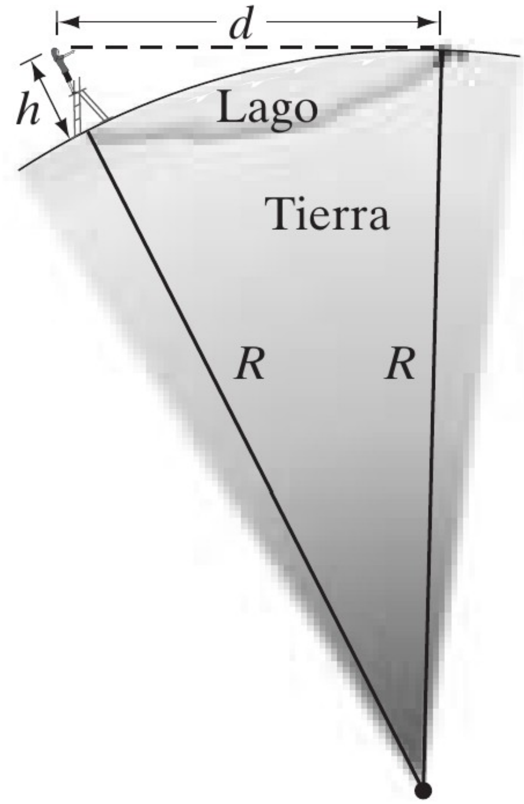


Figura 6: Esquema del ejemplo 4, pero no está a escala. Usted puede ver rocas pequeñas a nivel del agua de la orilla opuesta de un lago de 6.1 km de ancho, si se para sobre una escalera.

PLANTEAMIENTO Usamos geometría simple, incluyendo el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la longitud de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo, y a y b son las longitudes de los dos catetos.

SOLUCIÓN Para el triángulo rectángulo de la figura 1, los dos catetos son el radio de la Tierra R y la distancia $d = 6.1\,km = 6100\,m$. La hipotenusa es aproximadamente la longitud de $R + h$, donde $h = 3.0\,m$. Con el teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} R^2 + d^2 &\approx (R+h)^2 \\ &\approx R^2 + 2Rh + h^2 \end{aligned}$$

Algebraicamente despejamos R, después de cancelar R^2 en ambos lados:

$$R \approx \frac{d^2 - h^2}{2h} = \frac{(6100\,m)^2 - (3.0\,m)^2}{6.0\,m} = 6.2 \times 10^6\,m = 6200\,km$$

NOTA Mediciones precisas dan 6380 km. Sin embargo, ¡siéntase orgullosos de su logro! Con unas cuantas mediciones aproximadas y simple geometría, usted realizó una buena estimación del radio de la Tierra. No tuvo que ir al espacio ni usar un metro extremadamente largo para medir.

PROBLEMAS

Para algunos de estos problemas, usted debe investigar información que no es proporcionada por esta guía. En ese caso, se solicita que indique claramente en su procedimiento de donde obtuvo esta información con su respectivo link. El no hacer esta indicación puede bajar la nota de la sustentación de la actividad.

1. Estime cuántos libros se pueden almacenar en una biblioteca universitaria con 3500 m^2 de superficie en la planta. Suponga que hay ocho anaqueles de alto, que tienen libros en ambos lados, con corredores de 1.5 de ancho. Los libros tienen, en promedio, el tamaño de éste.

2. Estime el tiempo que le tomaría a un corredor recorrer (a 10 km/h) de Bogotá a Tunja.

3. Estime el número de litros de agua que un ser humano bebe durante su vida.

4. El río Magdalena tiene una longitud de 1528 km y una profundidad promedio de 12m. Estimar cuanto volumen de agua puede caber en el río (indique el modelo matemático que usa para hacer la estimación). Si una casa promedio tiene un volumen de $297{,}5\,m^3$, ¿cuantas casas "cabrían" en el río Magdalena?

5. Estime cuánto tiempo le tomaría a una persona podar el césped del estadio de El Campín usando una podadora casera ordinaria. Suponga que la podadora se mueve con una rapidez de 1 km/h y tiene un ancho de 0.5 m.

6. Estime el número de dentistas que debería haber en Bogotá si según La Organización Mundial de la Salud (OMS), la proporción dentista/habitantes en países en vías de desarrollo debería ser de 1 dentista cada 2000 habitantes (Fuente: https://www.medigraphic.com/cgi-bin/new/resumen.cgi?IDARTICULO=97166).

7. Usted está en un globo de aire caliente a 200 m por encima de una llanura plana tejana y mira hacia el horizonte. ¿Qué tan lejos puede ver, es decir, qué tan lejos está su horizonte? El radio de la Tierra es de 6400 km aproximadamente.

8. Una persona muy pudiente decide contratarlo a usted durante 30 días y usted puede decidir entre dos posibles formas de pago: ya sea *a)* 500'000 pesos por día, o *b)* 50 pesos el primer día, 100 pesos el segundo día y así sucesivamente, duplicando diariamente su paga diaria hasta el día 30. Use una estimación rápida para tomar su decisión y justifíquela.

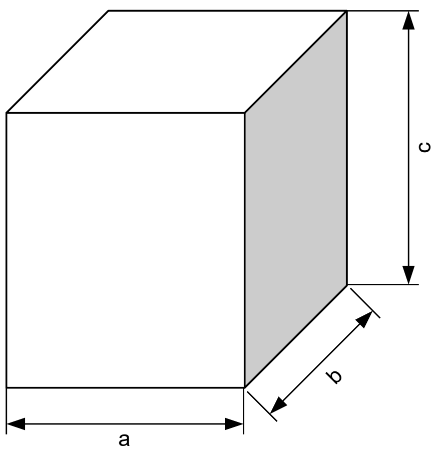
9. De acuerdo al periódico "La Voz" de Argentina, de un árbol se obtienen 16 resmas de papel blanco (8000 hojas); las especies que se utilizan para producir papel necesitan entre 10 y 13 años de crecimiento y el promedio de consumo de papel a nivel mundial es de 48 kilos por persona por año. Calculando el volumen que tiene una hoja de tamaño carta y teniendo en cuenta que una hoja de estas puede tener una masa de 75 gramos, *a)* calcular cuantos árboles

son “convertidos en desecho” al año si el desperdicio es de 400 millones de toneladas anuales a nivel global *b)* ¿cuantos años de vida de los arboles se pierden por el uso inconsciente del papel? *c)* ¿Cuántos arboles por persona se talan para producir la demanda por año que requiere una persona? *d)* Con los resultados obtenidos ¿consideras normal o exagerado el uso del papel?

10. El uso de las redes sociales esta teniendo un impacto significativo en la manera de pensar de sus usuarios. Según el periódico La Vanguardia, se hizo un estudio en donde se encontró que en 2021, el uso promedio de la red social TikTok es de 80 minutos por persona al día. Si el tiempo promedio de un video de esta red es de 4,7 minutos *a)* ¿Cuantos videos estaría consumiendo un usuario diariamente? *b)* Si desarrollar un aprendizaje toma alrededor de 100 horas de trabajo, ¿Cuantos días de uso de Tiktok se necesitarían para lograr un nuevo aprendizaje? *c)* Si uno de cada 6 videos vistos en Tiktok tuviera la posibilidad de generar un efecto negativo en la mente de una persona, ¿Cuantos videos al mes tendrían un efecto negativo en las personas?

Modelamiento Geométrico.

Hay muchas situaciones o fenómenos de la naturaleza que están vinculados a la geometría. Se vio anteriormente que para algunas situaciones se puede usar un modelo matemático simple para dar una estimación, pero en ciertas circunstancias podemos "mejorar" el modelo con el coste de agregar más complejidad a este. Adicionalmente, varios fenómenos están sujetos a cambios en el tiempo o son dependientes de una magnitud base. En general esta dependencia es conocida en matemáticas como **modelos parametrizados**. Para entender este concepto se plantea el siguiente ejemplo:



Actividad: Calcular el volumen y el área de la superficie de material.

Situación no paramétrica: medidas fijas.

Para esta situación se ofrecen las siguientes medidas.

a	b	c
10cm	12cm	15cm

Volumen: La ecuación para el volumen de una caja es con la fórmula $V_{caja}=a\cdot b\cdot c$, por lo que el volumen de la figura sería:

$$V_{caja}=10\,cm\cdot 12\,cm\cdot 15\,cm=1800\,cm^3$$

Superficies de las caras: Para cada cara, tenemos que la fórmula de superficie de un rectángulo es $S_{rect}=b\cdot h$ donde b y h son los lados perpendiculares de cada cara. Esta figura en particular tiene 6 caras (tapa, base, y cuatro caras laterales) de las cuales hay 3 pares de caras opuestas que comparten las medidas indicadas. Los cálculos serían los siguientes:

$a\times b$	$b\times c$	$a\times c$
$S_{ab}=a\cdot b$ $S_{ab}=10\,cm\cdot 12\,cm=120\,cm^2$	$S_{bc}=b\cdot c$ $S_{bc}=12\,cm\cdot 15\,cm=180\,cm^2$	$S_{ac}=a\cdot c$ $S_{ac}=10\,cm\cdot 15\,cm=150\,cm^2$
$S_{ab}+S_{ab}=2\,S_{ab}=240\,cm^2$	$S_{bc}+S_{bc}=2\,S_{bc}=360\,cm^2$	$S_{ac}+S_{ac}=2\,S_{ac}=300\,cm^2$
	TOTAL:	$S_{total}=900\,cm^2$

Como se puede ver, los resultados obtenidos son **valores constantes**, esto significa que las dimensiones con sus respectivas superficies y volumen **no** son afectadas por el tiempo u otra variable de control.

Situación paramétrica: medidas con una o varias variables.

Para esta situación se ofrecen las siguientes medidas.

a	b	c
x	2x	3x

Volumen: La ecuación para el volumen se mantiene del ejemplo anterior, $V_{caja} = a \cdot b \cdot c$, por lo que el volumen de la figura se expresaría sustituyendo los valores de a, b y c por las expresiones variables:

$$V_{caja} = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$$

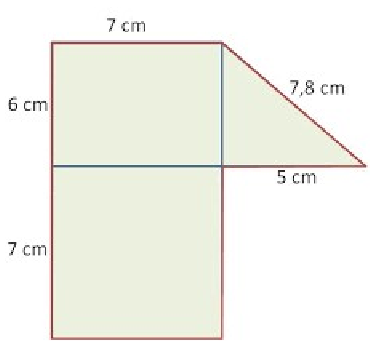
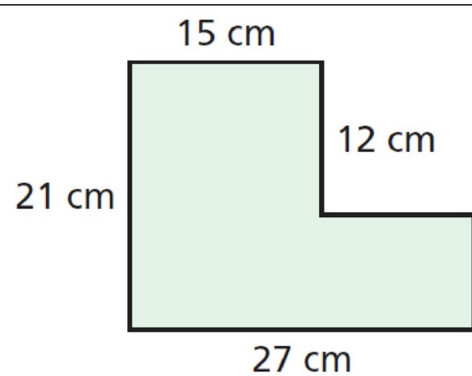
Como se puede apreciar en la fórmula, si el lado que mide x cambia, sus otros lados adyacentes también cambiarán el doble y el triple respectivamente. Esto hace que el volumen cambie en 6 veces al valor de x al cubo.

Superficies de las caras: Al igual que en el caso anterior se mantiene la misma fórmula de superficie, pero en este caso la sustitución de los valores se hace por las expresiones algebraicas que representan cada lado: $a = x$; $b = 2x$ y $c = 3x$.

$a \times b$	$b \times c$	$a \times c$
$S_{ab} = a \cdot b$ $S_{ab} = x \cdot 2x = 2x^2$	$S_{bc} = b \cdot c$ $S_{bc} = 2x \cdot 3x = 6x^2$	$S_{ac} = a \cdot c$ $S_{ac} = x \cdot 3x = 3x^2$
$2x^2 + 2x^2 = 4x^2$	$6x^2 + 6x^2 = 12x^2$	$3x^2 + 3x^2 = 6x^2$
	TOTAL:	$4x^2 + 12x^2 + 6x^2 = 22x^2$

Como se puede ver, los resultados obtenidos son **valores dependientes de la variable** x, no se obtuvo un valor constante sino una ecuación como resultado. Esto significa que las dimensiones y sus respectivas superficies y volumen cambiarán en función de la variable x, o dicho de otra forma, x es el parámetro de la superficie y el volumen de la figura.

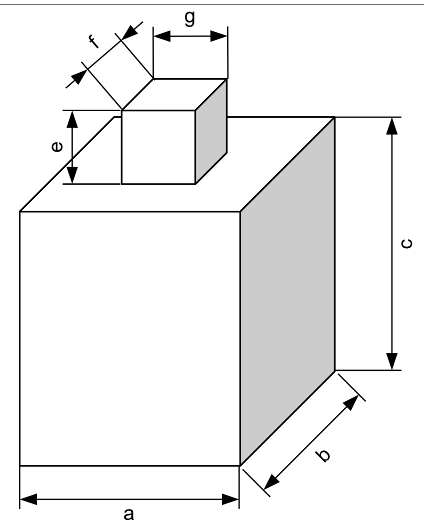
Al hacer análisis geométrico debemos tener en cuenta que algunas formas son resultado de la **unión** o **sustracción** de partes más simples. Por ello, se recomienda siempre realizar un esquema de cada situación y con base en este, determinar las medidas de sus lados y sus posibles relaciones con las medidas de sus componentes (uniones) para plantear las ecuaciones en forma correcta. A continuación se ofrecen unos ejercicios donde se puede ejercitar estas situaciones.

	
Este es un ejemplo de una figura compuesta por la suma de partes más simples. Se puede ver que en sus uniones se establecen medidas comunes.	*Aquí, por otro lado se podría ver esta figura compuesta como un rectángulo grande de 27x21 cm² menos un pedazo de 12x12 cm² .*

PROBLEMAS

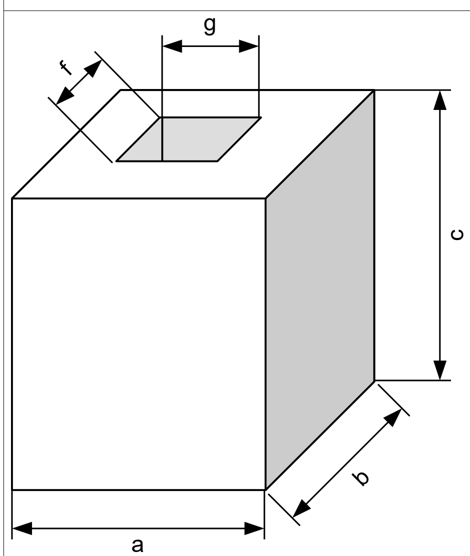
Calcular el volumen y el área de la superficie de material propuesto. Indicar procedimientos claros y ordenados y los respectivos dibujos que demuestren el procesamiento de las figuras a modelar. Cuando el resultado sea una ecuación, simplificar la expresión lo máximo posible.

Sección I



	a	b	c	e	f	g
1.	10cm	12cm	15cm	4cm	2cm	3cm
2.	x	10m	10m	2m	1m	0,7m
3.	x	x	x	¼ x	¼ x	¼ x
4.	x	2x	3x	x	x	½ x
5.	2x-1	2x-2	2x-3	x+1	x-2	x+3

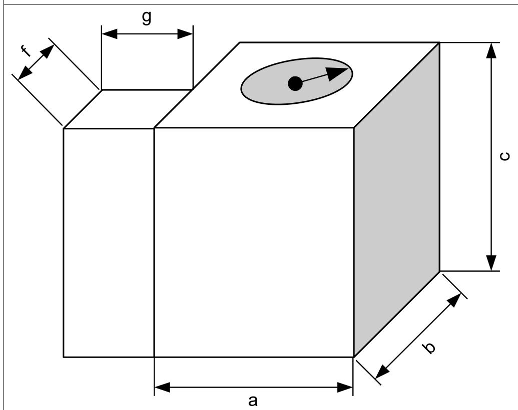
Sección II



	a	b	c	f	g
6.	10cm	12cm	15cm	6cm	7cm
7.	x	10m	10m	1m	0,7m
8.	x	x	2x	¼ x	¼ x
9.	x	2x	3x	x	½ x
10.	2x-1	2x-2	2x-3	x-2	x+3

Nota: El hueco rectangular tienen como altura c.

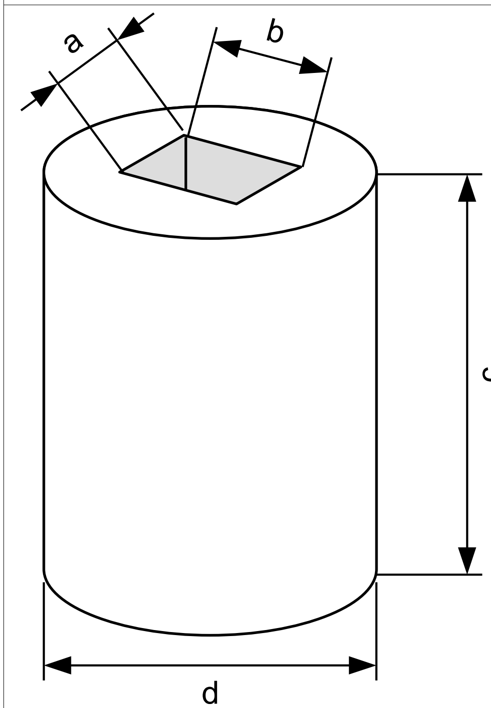
Sección III



	a	b	c	radio	f	g
11.	10cm	12cm	15cm	3cm	2cm	3cm
12.	x	x	x	¼ x	¼ x	¼ x
13.	x	2x	3x	x	x	½ x
14.	3x	4x	10x	x	2x	2x
15.	½ x	2x	½ x	⅔ x	¾ x	x+2

Nota: El hueco circular tienen como altura $\frac{c}{2}$.

Sección IV



	a	b	c	d
16.	10cm	12cm	15cm	30cm
17.	x	x	x	6x
18.	3x	4x	10x	12x
19.	½ x	2x	½ x	4 x+2
20.	6x+1	4x+5	7x+6	9x+10

Nota: El hueco rectangular tienen como altura $2\,b$.

Nota: Se recomienda ir avanzando en esta guía y traer en clase las dudas e inquietudes que puedan presentarse. Anotar sus dudas en el cuaderno y las partes en donde quede bloqueado ayudará a una resolución de inquietudes más eficiente. Muchos éxitos!!

Anexo: productos notables.

Cuadrados:

$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$ $\qquad (a-b)^2=a^2-2\,ab+b^2$ $\qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Cubos:

$(a+b)^3=a^3+3\,a^2\,b+3\,ab^2+b^3$ $\qquad (a-b)^3=a^3-3\,a^2\,b+3\,ab^2-b^3$